Kombinatorische Abzählverfahren - LÖSUNGEN

TEIL C: Lösungen

1. Produktregel – das einfache Verfahren

Aufgabe 1: Auto-Ausstattung
Aufgabe 2: Tanzstunde
Aufgabe 3: Menüplanung
Aufgabe 4: Aktenzeichen
Aufgabe 5: Partybekleidung

2. Permutationen - die Starterklasse

Aufgabe 1: Foto-Shooting
Aufgabe 2: Freunde besuchen
Aufgabe 3: Fensterdekoration
Sonderaufgabe: CD-Regal
Aufgabe 4: Anagramm OTTO
Aufgabe 5: Zahlen aus Ziffern

3. Kombinationen – die Königsklasse

Aufgabe 1: Lotto 6 aus 49
Aufgabe 2: Handballturnier
Aufgabe 3: Sektempfang
Aufgabe 4: Punkte und Geraden
Aufgabe 5: Kaugummi-Automat
Aufgabe 6: Großhandel

4. Variationen – die Meisterklasse

Aufgabe 1: Siegereinlauf
Aufgabe 2: Esstisch-Platzierungen
Aufgabe 3: Kartenspiel
Aufgabe 4: Fußballtoto-Elfer-Wette
Aufgabe 5: Tresor-Schloss
Aufgabe 6: Kontrolllämpchen

5. Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Aufgabe 1: Vier bunte Kugeln
Aufgabe 2: Schaufensterdekoration
Aufgabe 3: Nummerierte Kugeln
Aufgabe 4: Miss-Wahl

6. Geordnete Stichproben mit Zurücklegen

Aufgabe 1: Farbige Bälle in Ballnetz
Aufgabe 2: Anagramm ESEL
Aufgabe 3: Urne mit 5 farbigen Kugeln
Aufgabe 4: Farbige Bausteine

1. Produktregel – das einfachste Verfahren

Produktregel

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente (n) der Teilmengen (k) unterscheiden sich voneinander.
2) Es müssen alle Elemente jeder Teilmenge ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Aufgabe 1: Auto-Ausstattung

Ein Hersteller bietet folgende Ausstattungsmerkmale an:
Leistung: 50 kW, 70 kW und 90 kW
Farben: weiß, blau, rot, schwarz
Reifen: Sommerreifen, Winterreifen, Allwetterreifen
Wie viele unterschiedliche Ausstattungen kann der Hersteller anbieten?

1. Merkmal (Leistung): $n_1 = 3$
2. Merkmal (Farben): $n_2 = 4$
3. Merkmal (Reifen): $n_3 = 3$

$A = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ (A = Anzahl aller Möglichkeiten)
$A = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ A = 36
Antwort: Es gibt 36 Ausstattungen.

2. Permutationen – die Starterklasse

a) Permutationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente (N) der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
2) Es müssen alle Elemente der Ausgangsmenge ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: A = N !

Aufgabe 1: Foto-Shooting

3 Mädels posieren für ein Foto-Shooting. Wie viele unterschiedliche Fotos entstehen, wenn jedes Mal die Plätze getauscht werden?

N = 3 (Anzahl aller Elemente)
A = N ! (A = Anzahl aller Fotos = Anzahl aller Möglichkeiten)

$A = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ A = 6
Antwort: Es entstehen 6 unterschiedliche Fotos.

3. Kombinationen – die Königsklasse

a) Kombinationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen (k = Anzahl der Elemente) ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = \frac{N!}{(N-k)!\cdot k!}$

Siehe auch Binomialkoeffizient.

Aufgabe 1: Lotto 6 aus 49

Von 49 Kugeln werden 6 Kugeln gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen. (Die Reihenfolge der Kugeln ist egal.)

N = 40 (Anzahl aller Elemente)
k= 6 (Anzahl Elemente der Teilmenge)

$$A = \frac{N!}{(N-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$A = \frac{49\,!}{(49-6)\,!\cdot 6!} = \binom{49}{6}$$ A = 13.983.816

Antwort: Ca. 14 Millionen Möglichkeiten gibt es, diese 6 Kugeln zu ziehen.

Aufgabe 3: Sektempfang

An einem Sektempfang nehmen 5 Personen teil. Jeder stößt mit jedem an.
Wie oft wird angestoßen?

N = 5 (Anzahl aller Personen)
k = 2 (Anzahl Elemente der Teilmenge)

$$A = \frac{N!}{(N-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$A = \frac{5\,!}{(5-2)\,!\cdot 2!} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\,!}{3\,!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$$ A = 10

Antwort: Insgesamt wird 10mal angestoßen.

b) Variationen mit Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen ausgewählt werden.
3) Bei jeder Ziehung (k) darf ein bereits vorher gezogenes Element wieder ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = N^k$

Aufgabe 5: Tresor-Schloss

Ein Tresor-Schloss hat 3 Rädchen mit jeweils 10 Ziffern. Wie viele Einstellungen gibt es?
N = 10 (Anzahl aller Elemente = Ziffern)
K = 3 (Anzahl der Rädchen = Ziehungen)

$A = N^k$
$A = 10^3 = 1000$ A = 1000 Probe: 000, 001, 002 bis 999.
Antwort: Es gibt 1000 Einstellungen.

5. Geordnete Stichproben ohne Zurücklegen

´Permutationen ohne Wiederholung´ und ´Variationen ohne Wiederholung´ sind hier einzuordnen.

a) Permutationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente (N) der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
2) Es müssen alle Elemente der Ausgangsmenge ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = N!$

Auf das Urnenmodell übertragen heißt das:

1) Alle Kugeln unterscheiden sich voneinander.
2) Alle Kugeln werden gezogen.
3) Jede Kugel kann nur 1x gezogen werden.
4) Geordnete Reihenfolge, da jede Reihenfolge einzigartig ist. (Jede Reihenfolge ist eine Möglichkeit! Reihenfolge = Anordnung)

Siehe auch Beispiel: Foto-Shooting

Aufgabe 1: Vier bunte Kugeln

In einer Urne liegen 4 Kugeln in den Farben rot, blau, grün und weiß. Auf wie viele verschiedene Arten können diese 4 Kugeln nacheinander gezogen werden?

N = 4

A = N !
$A = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ A = 24

Diese 4 Kugeln können auf 24 unterschiedliche Arten gezogen werden.

6. Geordnete Stichproben mit Zurücklegen

´Permutationen mit Wiederholung´ und ´Variationen mit Wiederholung´ sind hier einzuordnen.
Durch das Zurücklegen können einzelne Elemente mehrmals gezogen werden!

b) Variationen mit Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen ausgewählt werden.
3) Bei jeder Ziehung (k) darf ein bereits vorher gezogenes Element wieder ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = N^k$

Auf das Urnenmodell übertragen heißt das:

1) Alle Kugeln in der Ausgangsmenge unterscheiden sich voneinander.
2) Nach dem Ziehen wird die Kugel in die Urne zurück gelegt.
3) Es erfolgen k-Ziehungen (k = Anzahl der Ziehungen).
3) Geordnete Reihenfolge, da jede Reihenfolge einzigartig ist.

Siehe auch Beispiel: Fußballtoto-Elferwette

Aufgabe 3: Urne mit 5 farbigen Kugeln

In einer Urne befinden sich 5 Kugeln in den Farben weiß, rot, gelb, blau und schwarz. Es wird 3x gezogen, nach jeder Ziehung wird die Kugel in die Urne zurück gelegt.
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, 3 Kugeln zu ziehen?

N = 5 (Anzahl aller Elemente = Kugeln)
k = 3 (Anzahl der Ziehungen)

$A = N^k$
$A = 5^3 = 125$ A = 125

Antwort: Es gibt 125 Möglichkeiten.

10. Ungeordnete Stichproben ohne Zurücklegen

Ungeordnete Stichproben, d.h. Kombinationen werden gefragt!

´Kombinationen ohne Wiederholung´ und ´Kombinationen mit Wiederholung´ sind hier einzuordnen.

Kombinationen ohne Wiederholung

Voraussetzungen:
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen (k = Anzahl der Elemente) ausgewählt werden.
3) Jedes Element darf nur 1x ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!}$

Auf das Urnenmodell übertragen heißt das:

1) Alle Kugeln unterscheiden sich voneinander.
2) Es werden nur einige Kugeln (Anzahl = k) gezogen.
3) Jede Kugel kann nur 1x gezogen werden.
4) Ungeordnete Reihenfolge, d.h. Reihenfolge ist nicht wichtig.

Siehe auch Beispiel: Lotto 6 aus 49

Aufgabe 1: Urne mit 10 nummerierten Kugeln

Aus einer Urne mit 10 nummerierten Kugeln werden 3 Kugeln gezogen.
Wie viele Kombinationen können gezogen werden?

N = 10 (Anzahl aller Elemente)
k= 3 (Anzahl Elemente der Teilmenge)

$$A = \frac{N!}{(N-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$A = \binom{10}{3} = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$ A = 120

Antwort: Es gibt 120 Möglichkeiten, diese 3 Kugeln zu ziehen.

11. Ungeordnete Stichproben mit Zurücklegen

Kombinationen mit Wiederholung

<u>Voraussetzungen:</u>
1) Alle Elemente der Ausgangsmenge (N) unterscheiden sich voneinander.
2) Es dürfen nur Teilmengen (k = Anzahl der Elemente) ausgewählt werden.
3) Die Elemente können mehrmals ausgewählt werden.

Anzahl der Möglichkeiten: $A = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$

Auf das Urnenmodell übertragen heißt das:

1) Alle Kugeln unterscheiden sich voneinander.
2) Es werden nur einige Kugeln (Anzahl = k) gezogen.
3) Nach dem Ziehen wird die Kugel in die Urne zurück gelegt.
3) Jede Kugel kann mehrmals gezogen werden.
4) Ungeordnete Reihenfolge, d.h. Reihenfolge ist nicht wichtig.

Siehe auch Beispiel: Kaugummi-Automat

Aufgabe 1: Kugeln ziehen mit Zurücklegen

In einer Urne befinden sich 8 unterschiedliche Kugeln. Es wird 4x gezogen. Nach jeder Ziehung wird die Kugel wieder in die Urne zurück gelegt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es (ohne Beachtung der Reihenfolge)?

N = 8 (Anzahl aller Kugeln)
k = 4 (Anzahl der Ziehungen)

$$A = \frac{(N+k-1)!}{(N-1)! \cdot k!}$$

$$A = \frac{(8+4-1)!}{(8-1)! \cdot 4!} = \frac{11!}{7! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 330 \qquad A = 330$$

Es gibt 330 Kombinationen.

12. Binomialkoeffizent – das Zauberwort für Kombinationen

Mit dem Binomialkoeffzienten lassen sich mögliche Anordnungen in der Kombinatorik sehr leicht berechnen.

$$A = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$ Binomialkoeffizient (sprich: n über k)

Der Binomialkoeffizient gibt an, auf wie viele unterschiedliche Arten man eine Teilmenge (k Elemente) aus der Gesamtmenge (n) auswählen kann.

Übertragen auf das Urnenmodell:
Ziehen ohne Zurücklegen, Ergebnismenge ohne Beachtung der Reihenfolge.

Siehe auch Aufgaben Kombinationen (ohne Wiederholung).
Siehe auch Beispiel: Lotto 6 aus 49

Aufgabe 1: Schulfest-Lotto

Zum Schulfest wird ein kleines Lotto veranstaltet. Aus 10 unterschiedlichen Kugeln werden 3 gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 3 Kugeln zu ziehen?

N = 10
k = 3

$$A = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$A = \binom{10}{3} = \frac{10\,!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$ A = 120

Es gibt 120 Möglichkeiten, 3 Kugeln zu ziehen.

